

Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en indiquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

La calculatrice est autorisée

Consignes à suivre :

- Numéroté les pages. Numéroté les questions (inutile d'écrire les titres).
- Soigner la rédaction & soigner la présentation : aérer la copie, encadrer ou souligner les résultats.
- Lire rapidement l'ensemble du sujet en début d'épreuve : les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre de votre choix.
- Pour un exercice donné, traiter et rendre les questions dans l'ordre.
- Toute application numérique ne comportant pas d'unité ne sera pas prise en compte.

I - Fort Boyard : l'épreuve de la cloche

Parmi les épreuves du jeu télévisé Fort Boyard soumises aux candidats, on s'intéresse à l'épreuve de la cloche. Le candidat est attaché debout sur un trapèze, ce dernier faisant initialement un angle de 20° par rapport à la verticale. Celui-ci est lâché sans vitesse initiale et décrit un mouvement oscillant. Ses équipiers vont alors tirer sur une corde pour donner de plus en plus d'amplitude au trapèze, tout comme s'ils sonnaient une cloche. Le candidat malmené pourra attraper l'indice qui se trouve suspendu en hauteur à condition que l'amplitude des oscillations soit suffisante. Pour une efficacité maximale, la technique consiste à tirer sur la corde lorsque le trapèze est à son point le plus haut afin d'en augmenter l'amplitude à chaque oscillation.

On étudie tout d'abord le mouvement du système {candidat + trapèze}, sans l'intervention des coéquipiers, effectuant des oscillations libres. On modélise la situation par un pendule simple ponctuel M de masse m , attaché à l'extrémité d'un fil souple de masse négligeable, inextensible de longueur $\ell_0 = 7,0 \text{ m}$ et dont l'autre extrémité O est fixe, plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$ avec $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ (voir figure 1). Dans le référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen, le mouvement du point M est plan, sa position étant repérée par l'angle θ . On néglige tout frottement. À l'instant initial $t = 0$, le pendule est écarté d'un angle θ_0 et lâché sans vitesse.



Figure n°1 : Pendule simple

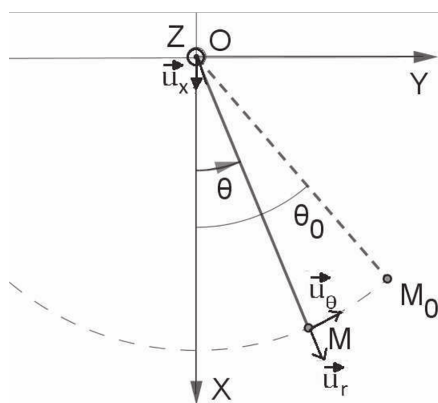
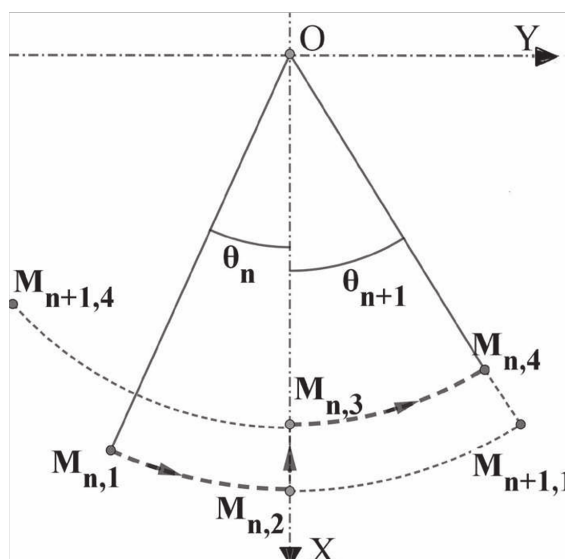


Figure n°2 : Pendule de longueur variable



- 1) Exprimer les vecteurs vitesse $\vec{v}$ et accélération $\vec{a}$ du point M dans la base polaire.
 - 2) Expliciter l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_p(\theta)$ du point M en fonction de m, g, ℓ_0 et de θ . On prendra $\mathcal{E}_p(\theta = \pi/2) = 0$.
 - 3) Établir l'équation différentielle vérifiée par θ . On posera $\omega_0 = \frac{g}{\ell_0}$.
 - 4) Dans le cas de petits mouvements, déterminer la loi horaire $\theta(t)$ et calculer littéralement, puis numériquement la période T_0 du mouvement.
- Afin de tenir compte de l'intervention des coéquipiers, on considère désormais que la longueur du fil, notée $\ell(t)$, varie dans le temps. On ne se place plus dans le cas de petits mouvements.
- 5) Montrer que l'équation différentielle du mouvement s'écrit à présent :

$$\ddot{\theta} + \frac{2 \dot{\ell}(t)}{\ell(t)} \dot{\theta} + \frac{g}{\ell(t)} \sin(\theta) = 0$$

Cette équation étant difficile à résoudre analytiquement, on opte pour une approche discrète dans laquelle la longueur $\ell(t)$ passe instantanément de la valeur $\ell_0 (1 + \alpha)$ à la valeur $\ell_0 (1 - \alpha)$ au passage par la verticale, et reprend sa valeur $\ell_0 (1 + \alpha)$ aux positions extrêmes où sa vitesse s'annule. On a $0 < \alpha < 1$. Lors d'un mouvement entre $M_{n,1}$ et $M_{n,4}$, le mobile part du point $M_{n,1}$ d'angle non orienté θ_n avec une vitesse nulle, et arrive en $M_{n,4}$ d'angle non orienté θ_{n+1} avec une vitesse nulle (voir figure 2). Dans la phase retour, le mobile repart de $M_{n+1,1}$ sans vitesse.

- 6) Que dire de l'énergie mécanique entre les points $M_{n,1}$ et $M_{n,2}$? En adaptant le résultat de la question 2, montrer que la vitesse $v_{n,2}$ au point $M_{n,2}$ lors du passage du mobile par la verticale peut s'écrire :

$$v_{n,2} = \sqrt{2g\ell_0\beta} \left[1 - \cos(\theta_n) \right]^\gamma$$

Préciser l'expression de β en fonction de α , ainsi que la valeur de l'exposant γ .

- 7) Entre les points $M_{n,2}$ et $M_{n,3}$, on admet que le moment résultant exercé sur le mobile est nul : son moment cinétique est donc conservé. En déduire la vitesse $v_{n,3}$ au point $M_{n,3}$ en fonction de g, ℓ_0, α et de θ_n .
- 8) Déterminer alors la relation entre l'angle de montée θ_{n+1} et l'angle θ_n sous la forme :

$$1 - \cos(\theta_{n+1}) = \left(\frac{1 + \alpha}{1 - \alpha} \right)^\delta \left[1 - \cos(\theta_n) \right]$$

Donner la valeur de l'exposant δ .

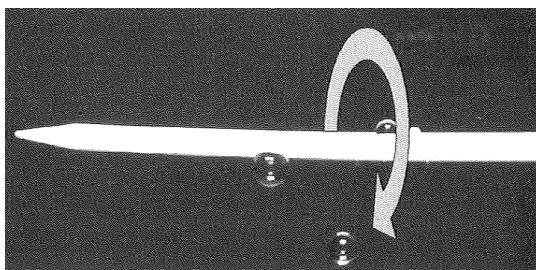
- 9) Montrer que l'amplitude des balancements augmente.
- 10) En remarquant que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = 1 - \cos(\theta_n)$ est géométrique, exprimer en fonction de θ_0 et de α le nombre N d'allers-retours permettant au candidat d'atteindre un angle $\theta = \pi/2$ et ainsi d'attraper l'indice. Calculer numériquement N en prenant $\theta_0 = 20^\circ$ et $\alpha = 0,05$.

----- Fin de la partie I -----

II - Mouvement d'une goutte d'eau autour d'une aiguille

En 2012, l'astronaute américain Don PETTIT réalise à bord de l'ISS (*International Space Station*) l'expérience suivante : il frotte une aiguille à tricoter en nylon avec une feuille de papier, ce qui a pour effet de charger l'aiguille uniformément, avec une charge négative.

Dans le même temps, il crée au voisinage de l'aiguille une goutte d'eau de masse m et de rayon $R \simeq 2$ mm à laquelle il donne une charge $q > 0$. Il constate que la goutte se met en orbite autour de l'aiguille, avec une pseudo-période de l'ordre de 3 s à une distance de l'aiguille de l'ordre de 1 cm. Le mouvement dure jusqu'à ce que la goutte s'écrase sur l'aiguille. Sur l'image ci-dessous, La flèche grisée indique une rotation de la goutte autour de l'axe de l'aiguille.



Pour décrire cette situation, on se place dans un repère orthonormé muni des coordonnées cylindriques $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$, l'axe (Oz) étant confondu avec l'axe de l'aiguille. La position de la goutte, supposée ponctuelle, est repérée à tout instant par le point $M(r, \theta, z)$.

Dans ce système de coordonnées, on admet que l'aiguille chargée négativement produit un champ électrostatique $\vec{E}(M)$ qui vaut :

$$\vec{E}(M) = -\frac{K}{r} \vec{u}_r \quad \text{avec : } K > 0$$

Données :

- Masse volumique de l'eau : $\rho = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$
- Coefficient de frottement : $k = 6,8 \cdot 10^{-7} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$
- Accélération de la pesanteur terrestre : $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$

II.1 - Champ et potentiel électrostatiques produits par l'aiguille

11) Déterminer, à une constante additive près, le potentiel électrostatique $V(M)$ produit par l'aiguille.

La constante sera prise nulle pour la suite.

II.2 - Étude du mouvement de la goutte

Dans un premier temps, on néglige les frottements de l'air sur la goutte, supposée de masse constante.

12) Donner l'expression de la résultante des forces que subit la goutte. Cette force est-elle centrale ?

Initialement : $r(0) = r_0, z(0) = 0$ et $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_\theta$.

13) Justifier que le mouvement est plan.

14) En utilisant le théorème du moment cinétique, déterminer l'expression de $\dot{\theta}$ en fonction de r, r_0 et v_0 .

15) Montrer que l'énergie mécanique de la goutte peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{\alpha}{r^2} + \beta \ln(r)}_{= \mathcal{E}_{p,eff}}$$

On explicitera les constantes positives α et β en fonction de m, r_0, v_0, q et K .

16) Tracer, en la justifiant, l'allure de l'énergie potentielle effective $\mathcal{E}_{p,eff}(r)$. Conclure sur la nature des mouvements possibles de la goutte et sur l'existence d'états de diffusion.

17) On s'intéresse au cas d'un mouvement circulaire de rayon r_0 . Établir l'expression de la vitesse de la goutte autour de l'aiguille en fonction de q, m et K , indépendamment de r_0 . Conclure sur la stabilité de la trajectoire.

La vitesse initiale de la goutte est maintenant $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_\theta + \dot{z}_0 \vec{u}_z$, avec $\dot{z}_0 = \dot{z}(0)$ non nulle. On constate que si $\dot{z}_0$ n'est « pas trop grand », la goutte arrivée au bout de l'aiguille peut effectuer des allers-retours le long de l'aiguille.

18) Décrire le mouvement. On constate que si $\dot{z}_0$ n'est « pas trop grand », la goutte arrivée au bout de l'aiguille peut effectuer des allers-retours le long de l'aiguille. Expliquer cette observation et préciser ce que signifie « pas trop grand » dans ce contexte.

II.3 - Prise en compte des frottements de l'air

Du fait des frottements de l'air sur la goutte, on observe que celle-ci finit par s'écraser sur l'aiguille au bout de plusieurs dizaines de secondes, après avoir effectué un certain nombre de tours. Pour simplifier, on suppose que $\dot{z}_0 = 0$. L'influence des frottements est modélisé par la force :

$$\vec{f} = -k \vec{v}$$

19) On réalise l'approximation suivante : la trajectoire est considérée comme localement circulaire, c'est-à-dire que sur un tour : $r(t) \simeq \text{cte}$. En déduire que v est une constante et donner son expression en fonction de q, m et K .

20) La goutte tend tout de même à s'écraser sur l'aiguille à cause de la force de frottement. Exprimer la puissance instantanée, notée $\mathcal{P}$, cédée par cette force à la goutte d'eau. Par un bilan d'énergie mécanique, montrer que le rayon de la trajectoire obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{r}{\tau}$$

où τ est une grandeur à exprimer en fonction de k et m .

- 21) En déduire la loi d'évolution $r(t)$. Évaluer numériquement la durée de chute de la goutte et commenter le résultat.
- 22) Calculer la variation relative de rayon au début de la trajectoire lorsque la goutte a effectué un tour autour de l'aiguille. Commenter la validité de l'approximation réalisée précédemment (trajectoire localement circulaire).
- 23) On examine dans cette question la faisabilité de cette expérience sur Terre. Dans le cas du mouvement circulaire étudié précédemment, comparer en norme la force exercée par l'aiguille sur la goutte au poids que subirait la goutte sur Terre. Conclure quant à la faisabilité de cette expérience sur Terre.

----- Fin de la partie II -----